Вказівки до розв'язання завдань II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики у 2021-2022 навчальному році

Підведення підсумків, визначення переможців та склад команди на наступний етап олімпіади, нагородження дипломами I, II або III ступенів відбувається згідно «Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності» (затвердженим наказом Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України від 22.09.2011 р. № 1099, зареєстрованим в Міністерстві юстиції України 17.11.2011 р. за № 1318/20056) та останніми змінами до цього положення.

6 клас

6.1. Перше число складає 40% від другого. Скільки відсотків складає друге число від першого?

Вказівка. Нехай *x* – перше число, а у – друге число. З умови задачі *маємо x=0,4 y. y=2,5 x.* Отже, друге число складає 250% від першого.

Відповідь. 250%.

6.2. Скільки різних добутків, кратних 10, можна утворити з чисел 2, 3, 5, 7, 9?

Вказівка. Оскільки, добуток має бути кратний 10, то в цьому добутку обидва числа 2 і 5 повинні бути присутніми. Числа утворюють різних добутків 2х2х2=8

***Відповідь.* 8**

6.3. Довести, що число $96^{2022} – 1$ ділиться на 5.

Вказівка. Відмітимо, що число 96^{n} закінчується цифрою 6. Тому число 96^{2022} -1 закінчується цифрою 5.

Отже, число 96^{2022} -1 ділиться на 5.

6.4. Як, маючи дві посудини місткістю 9 л і 4 л, принести з річки 6 л води?

Вказівка. Спочатку наллємо воду у дев'ятилітрову посудину. Потім двічі віділлємо по 4 л води. Тоді у дев'ятилітровій посудині залишиться 1 л, який можна перелити у порожню чотирилітрову посудину. Далі знову наллємо воду у 9-тилітрову і віділлємо з неї воду у чотирилітрову так, щоб заповнити її повністю. Тоді у дев'ятилітровій посудині залишиться 6 л.

7 клас

7.1. До числа 13 справа і зліва приписали по одній цифрі так, що отримане число було кратне 45. Знайти це число.

Вказівка. За умовою задачі $\overline{a13b} = 45n,$ де $1 \le a \le 9,$ $1 \le b \le 9,$ n – натуральне число. Оскільки, число $\overline{a13b}$ ділиться на 5, то *b*=0 або *b*=5. Аналогічно, число $\overline{a13b}$ ділиться на 9. Тому $a+b+1+3=9$ або $a+b+1+3=18.$ Якщо $b=0, a=5$ Якщо $b=5, a=9$

Відповідь. 5130; 9135.

7.2. Один робітник обробляє за тиждень 960 деталей. При цьому він використовує 12 різців, а другий робітник на обробку такої ж кількості деталей використовує 10 різців. Хто економніше використовує різці та на скільки відсотків?

Вказівка. Перший робітник одним різцем обробляє 80 деталей, а другий робітник – 96 деталей, що на 20% більше, ніж перший робітник.

Відповідь. Економніше різці використовує другий робітник, на 20%.

7.3.Обчислити суму $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2021\cdot 2022}.$

Вказівка.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2021\cdot 2022}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}$$

Відповідь. $\frac{2021}{2022}$

7.4. Є набір гир 1 г, 2 г, 3 г, …, 30 г. Із них вибрали 10 гир, загальна маса яких дорівнює третині маси всіх гир. Довести, що решту 20 гир можна розкласти по 10 гир так, щоб вони були в рівновазі.

Вказівка. Оскільки загальна маса всіх гир дорівнює 465 г, то її третя частина – 155 г. Після того, як забрали 10 гир загальною масою 155 г, тоді достатньо показати, що з решти можна взяти 10 масою 155 г.

8 клас

8.1. Дано рівність $\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$ Довести, що $(a+b)(b+c)(a+c)=0$

Вказівка. $\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$

$abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$

$a^2 b + a^2 c + b^2 c + b^2 a + c^2 a + c^2 b + 2abc = 0$

$(a + b)(b + c)(a + c) = 0$

8.2. Вказати вид натуральних чисел, які при діленні на 2 і на 3 мають в остачі 1. Відповідь обґрунтуйте.

Вказівка. Довільне натуральне число можна зобразити у вигляді n = 6k або n = 6k+1, або n = 6k+2, або n = 6k+3, або n = 6k+4, або n = 6k+5

Числа 6k, 6k+2, 6k+3, 6k+4,6k+5 не задовольняють умову задачі. Отже, всі числа можна зобразити у вигляді n = 6k+1

Відповідь. n = 6k+1, де k – ціле невід’ємне число.

8.3. Мені зараз вдвічі більше років, ніж було Вам тоді, коли мені було стільки ж років, скільки Вам зараз. Нам обом разом 70 років. Скільки мені років?

Вказівка. Нехай Вам було x років, а мені у років. Тепер Вам x+t , а мені y+t років. За умовою задачі

$$\begin{cases} y+t=2x, \\ x+t=y, \\ x+t+y+t=70. \end{cases}$$

$x=20, \quad y=30, \quad t=10$

Отже, мені 40 років.

Відповідь. 40 років

8.4. Знайти точки перетину графіків $|x|=|y|$ та $|y-2|=2x$.

Вказівка. Координати точок перетину задовольняють систему рівнянь $\begin{cases} |x|=|y| \\ |y-2|=2x \end{cases}$. З другого рівняння системи отримуємо, що $x \geq 0$.

Тому $\begin{cases} x=|y| \\ |y-2|=2x \end{cases}$ $\qquad |y-2|=2|y| \qquad (y-2)^2=4y^2$

$y=-2$ або $y=\dfrac{2}{3}$. Отже, $\begin{cases} x=2, \\ y=-2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}, \\ y=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

Відповідь. (2; -2); $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

8.5. Двоє по черзі кладуть доміно на шахову дошку 19х19 з вирізаною центральною клітинкою таким чином, щоб вони не накладалися. Програє той, хто не зможе зробити черговий хід. Скласти виграшну стратегію гри.

Вказівка. Виграє другий гравець, якщо буде повторювати ходи першого гравця симетрично відносно центральної клітинки.

9 клас

9.1. Знайти геометричне місце точок вершин парабол $y = x^2 - 2(a-1)x + a$

Вказівка. Розглянемо x_0, y_0 - координати вершини параболи. Тоді

$$\begin{cases} x_0 = a - 1, \\ y_0 = -a^2 + 3a - 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = x_0 + 1, \\ y_0 = -(x_0+1)^2 + 3(x_0+1) - 1 = -x_0^2 + x_0 + 1 \end{cases}$$

Відповідь. Парабола $y_0 = -x_0^2 + x + 1$

9.2. Розв'язати рівняння $x^2(x-2)^2 - 3(x-1)^2 - 1 = 0.$

Вказівка. $x^2(x-2)^2 - 3(x-1)^2 - 1 = 0$

$(x^2 - 2x)^2 - 3(x^2 - 2x + 1) - 1$

Нехай $y = x^2 - 2x,$ тоді $y^2 - 3y - 4 = 0$ $y = -1$ або $y = 4$ $x^2 - 2x = -1$ $x^2 - 2x + 1 = 0$ $x = 1$

Або $x^2 - 2x = 4$ $x^2 - 2x - 4 = 0$ $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{5}$

Відповідь. $x = 1,$ $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{5}$

9.3. Знайти двоцифрове число, яке менше від суми квадратів його цифр на 11 і більше за їх подвоєний добуток на 5.

Вказівка. За умовою задачі $\begin{cases} \overline{ab} + 11 = a^2 + b^2 \\ \overline{ab} = 2ab + 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} 10a + b + 11 = a^2 + b^2 \\ 10a + b = 2ab + 5 \end{cases}$$

$(a-b)^2 = 16$ $a - b = \pm 4.$

Якщо $a=b+4$, то 10 $(b+4)+b = 2b(b+4)+5$, ……………….$b=5$, $a=9$
Якщо $a=b-4$, то ……………….$b=5$, $a=1$

Відповідь. 95, 15

9.4. Якою цифрою закінчується число $45^n + 33^{4n} + 51^{3n}$, де n – натуральне число.

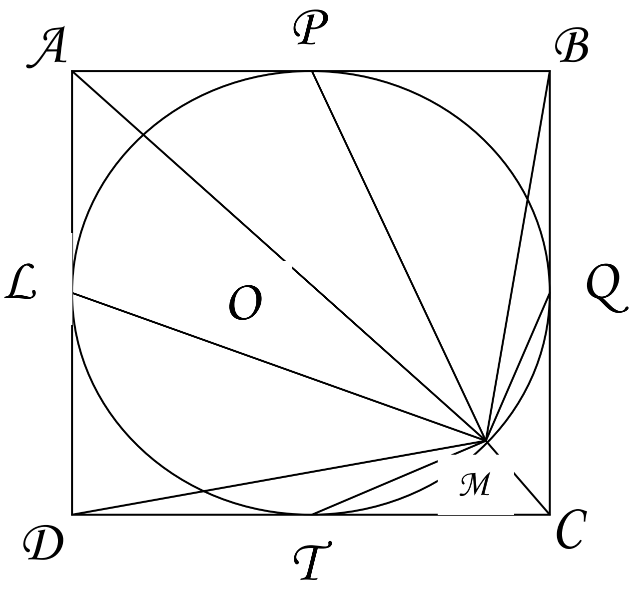
Вказівка. Число 45^n завжди закінчуються цифрою 5. Число 33^{4n} та 51^{3n} завжди закінчується цифрою 1.

$45^n + 33^{4n} + 51^{3n}$ закінчується 7.

Відповідь. 7.

9.5. У квадрат вписано коло. Довести, що сума квадратів відстаней від точки кола до вершин квадрата не залежить від вибору цієї точки. Знайти цю суму.

Вказівка.



Нехай $QTLP$–точки дотику кола до квадрата, M - довільна точка на кола.

O – центр кола.

Оскільки, MP, MQ, MT, ML – медіани трикутників MAB, MBC, MCD, MDA відповідно, то

$4MP^2 = 2\left(MA^2 + MB^2\right) - 4R^2,$

$4MQ^2 = 2\left(MB^2 + MC^2\right) - 4R^2,$

$4MT^2 = 2\left(MC^2 + MD^2\right) - 4R^2,$

$4ML^2 = 2\left(MA^2 + MD^2\right) - 4R^2.$

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = MP^2 + MQ^2 + MT^2 + ML^2 + 4R^2$

Оскільки MO – медіана ΔMQL і ΔMPT,

То $4MO^2 = 2\left(MQ^2 + ML^2\right) - 4R^2$

$4MO^2 = 2\left(MP^2 + MT^2\right) - 4R^2$

$MP^2 + MT^2 + MQ^2 + ML^2 = 8R^2$

Отже, $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 12\,R^2$

Відповідь. $12R^2$

10 клас

10.1. Обчислити: $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$, якщо x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2+3x-5=0.$

Вказівка. Використавши теорему Вієта, отримаємо $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{19}{25}$

Відповідь. $\frac{19}{25}$

10.2. Знайти найменше значення виразу $x+y+z$, якщо

$$\begin{cases} xy+yz=8, \\ yz+xz=9, \\ xz+xy=5. \end{cases}$$

Вказівка. Після додавання всіх рівнянь, отримаємо $xy+yz+xz=11 \Rightarrow$

$$\begin{cases} xy=2 \\ xz=3 \\ yz=6 \end{cases} \Rightarrow (xyz)^2=36 \Rightarrow xyz=\pm 6$$

З допомогою нескладних міркувань, робимо висновок $x+y+z=-6$

Відповідь. -6.

10.3. Довести, що якщо натуральні числа a і $5a$ мають однакову суму цифр, то a ділиться на 9.

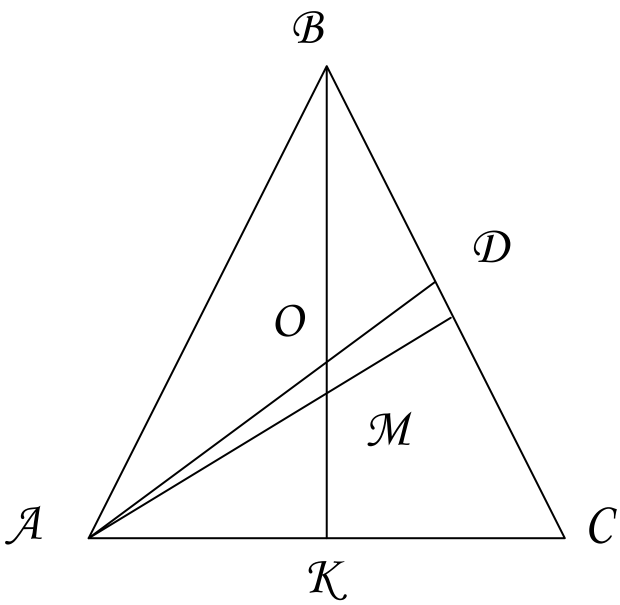
Вказівка. Нехай $S(a)$ - сума цифр числа a. Тоді $S(5a)$ - сума цифр числа $5a$. За умовою задачі $S(a)=S(5a)$

Як відомо $\begin{cases} a-S(a)\vdots 9 \\ 5a-S(5a)\vdots 9 \end{cases}$

Утворивши різницю, отримуємо, що 4a:9. $\Rightarrow a\vdots 9$

10.4. У рівнобедреному трикутнику *ABC (AB=BC)* бісектриса *AD* ділить бічну сторону у відношенні *BD* : *DC* = 5 : 6. Знайти відстань між точкою перетину медіан і точкою перетину бісектрис цього трикутника, якщо його периметр дорівнює 32.

Вказівка.



Використаємо властивість бісектриси трикутника $AB : AC = 5 : 6.$

x - коефіцієнт пропорційності

Отже, AB=5x, AC = 6x, ВС = 5x. $5x + 5x + 6x = 32;$ $x = 2.$

10, 10, 12 – сторони трикутника.

$$BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{100 - 36} = 8, \quad MB = \frac{2}{3} BK = \frac{16}{3}$$

З трикутника АВК за властивістю бісектриси маємо:

$$OB : OK = AB : AK \quad OB : OK = 10 : 6$$

$$6OB = 10(BK - OB),$$

$$16OB = 80, \quad OB = 5.$$

Отже, $OM = \frac{16}{3} - 5 = \frac{1}{3}.$

10.5. Є дошка розміром 3х3 клітинки і 9 карток розміром в одну клітинку, на яких написано деякі числа. Двоє гравців по черзі кладуть ці картки на клітинки дошки, по одній на клітинку. Після того як картки розкладено, перший (той, хто починав) підрахує суму шести чисел, що стоять у верхньому та нижньому рядках. Другий підраховує суми шести чисел, що стоять у лівому та правому стовпчиках. Виграє той, у кого сума більша. Довести, що при правильній грі першого другий не зможе виграти незалежно від того, які числа написані на картках.

Вказівка. Нехай $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ - числа написані на картках. Пронумеруємо клітинки таблиці

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Якщо $a_1 + a_9 > a_2 + a_8$, то перший ставить числом a_9 на клітинку 2, а другий його хід – число a_2 або a_1 на одну з клітинок 4 або 6.

Якщо $a_1 + a_9 < a_2 + a_8$, то перший ставить число a_1 на клітинку 4, а другий його хід – число a_9 або a_8 на одну з клітинок 2 або 8.

Якщо $a_1 + a_9 = a_2 + a_8$, то можна використовувати будь-яку із цих стратегій.

11 клас

11.1. Розв'язати рівняння:

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)^x + \left(5-2\sqrt{6}\right)^x = 10$$

Вказівка. Нехай $t = \left(5+2\sqrt{6}\right)^x$.

Помножимо задане рівняння на $\left(5+2\sqrt{6}\right)^x$

Тоді $t^2 - 10t + 1 = 0$ $\quad t = 5+2\sqrt{6}$ або $t = 5-2\sqrt{6}$

x=1, *x*=-1

Відповідь. *x*=1, *x*=-1

11.2. Чи існують натуральні числа *a, b, c* такі, що

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 4242?$$

Вказівка. З розкладу числа 4242 на прості множники бачимо, що лише одна сума з трьох повинна бути не меншою за 101:

4242 = 2 x 3 x 7 x 101.

Нехай *а+в* =101, тоді у двох інших сумах один із доданків повинен бути більшим за 50, що неможливо (2x3x7=42).

Відповідь. Ні

11.3. Довести, що якщо у тетраедра сума плоских кутів при трьох вершинах дорівнює 180^0, то всі його грані – рівні трикутники.

Вказівка. Розглянути розгортку даного тетраедра на площині, що містить грань, сума плоских кутів якої при вершинах дорівнює 180^0. Вона утворить трикутник, бо сума кутів при кожній вершині *A, B, C* дорівнює 180^0. Тоді AB, BC, AC – середні лінії побудованого трикутника. А отже, доведено, що всі чотири трикутники, які є гранями тетраедра, рівні.

11.4. Довести, що якщо для сторін і кутів деякого трикутника *ABC* виконується рівність $b+c=tg\frac{\angle A}{2}(b\cdot tg\angle B+c\cdot tg\angle C)$, то трикутник *ABC* рівнобедрений.

Вказівка. За теоремою синусів $b=2R\sin\angle B,\ c=2R\sin\angle C$.

$$\sin\angle B+\sin\angle C=tg\frac{\angle A}{2}\left(\sin\angle B\cdot tg\angle B+\sin\angle C\cdot tg\angle C\right)$$

$$\sin\angle B\left(1-tg\frac{\angle A}{2}tg\angle B\right)+\sin\angle C\left(1-tg\frac{\angle A}{2}tg\angle C\right)=0$$

$$\sin\angle B\frac{\cos\left(\frac{\angle A}{2}+\angle B\right)}{\cos\frac{\angle A}{2}\cos\angle B}+\sin\angle C\frac{\cos\left(\frac{\angle A}{2}+\angle C\right)}{\cos\frac{\angle A}{2}\cos\angle C}=0$$

$$\sin\angle B\frac{\cos\left(90^0+\frac{\angle B}{2}-\frac{\angle C}{2}\right)}{\cos\frac{\angle A}{2}\cos\angle B}+\sin\angle C\frac{\cos\left(90^0-\frac{\angle B}{2}+\frac{\angle C}{2}\right)}{\cos\frac{\angle A}{2}\cos\angle C}=0$$

………………………………………. $\angle B=\angle C$

Отже, $\angle B=\angle C$

11.5. Маємо аркуш паперу. Його розрізають на 8 або 12 частин. Кожну з частин, яку дістають після розрізання аркуша, знову розрізають на 8 чи 12 частин або залишають без змін Чи можна, продовжуючи таке розрізання, отримати 60 частин аркуша?

Вказівка. Після кожного розрізання паперу додається 7 або 11 нових частин паперу. Нехай додавалося по 7 частин x разів, а по 11 – y разів. Тоді за умовою задачі матимемо рівняння $7x+11y=59$.

Звідси y=(59-7x) : 11. Оскільки таких натуральних чисел, які задовольняють це рівняння, не існує, то розрізати так папір неможливо (у може набувати значень від 1 до 8).

Відповідь. Ні.